Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$[1]

16 Octobre 2007

On étudie les sous-groupes de $(\mathbb{R},+)$. Soit H un sous-groupe non réduit à 0. On pose

$$a = \inf\{x \in H \mid \ x > 0\}.$$

(a) Justifier l'existence de a. Montrer que $a \in H$.

(b) $\boxed{\text{Supposons } a > 0}$. Nous allons montrer que $H = a\mathbb{Z}$.

   (1) Montrer que $a\mathbb{Z} \subset H$.

   (2) Soit $h \in H$. Montrer[2] que $h = E(h/a)a$. En déduire que $H \subset a\mathbb{Z}$.

   (3) Conclure que $H = a\mathbb{Z}$.

(c) $\boxed{\text{Supposons } a = 0}$. Nous allons montrer que H est dense dans $\mathbb{R}$.

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha < \beta$.

   (1) Montrer qu'il existe $h \in H$ avec $0 < h < \beta - \alpha$.

   (2) Montrer que $(E(\alpha/h) + 1)\, h \in]\alpha, \beta[$ et donc $]\alpha, \beta[\cap H \neq \emptyset$

   (3) Conclure que H est dense dans $\mathbb{R}$.

(d) Soient $u, v \in]0, \infty[$, montrer que

$$u\mathbb{Z} + v\mathbb{Z} \text{ est dense dans } \mathbb{R} \iff \frac{u}{v} \notin \mathbb{Q}.$$

(e) Montrer que $\cos(\mathbb{Z})$ est dense dans $[-1, 1]$.

(f) Soient $u, v \in]0, \infty[$. L'ensemble $u\mathbb{N} + v\mathbb{N}$ est dense dans $\mathbb{R}$?

(g) Soient $u, v \in]0, \infty[$. L'ensemble $u\mathbb{N} + v\mathbb{N}$ est dense dans $[0, \infty[$?

(h) Soient $u, v \in]0, \infty[$. Nous étudions la densité de $u\mathbb{N} - v\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $u/v \notin \mathbb{Q}$.

   (1) Montrer qu'il existe une suite $(h_n = m_n u - k_n v)$ dans $u\mathbb{N} - v\mathbb{N}$ avec

      + $\lim\limits_{n\to\infty} m_n = \infty$ et (m_n) croissante.

      + $\lim\limits_{n\to\infty} k_n = \infty$ et (k_n) croissante.

      + $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$, avec $h_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $0 \leq \alpha < \beta$.

   (2) Montrer qu'il existe $h \in u\mathbb{N} - v\mathbb{N}$ avec $0 < h < \beta - \alpha$.

   (3) Montrer que $(E(\alpha/h) + 1)\, h \in]\alpha, \beta[$ et donc $]\alpha, \beta[\cap (u\mathbb{N} - v\mathbb{N}) \neq \emptyset$

   (4) Conclure que

$$u\mathbb{N} - v\mathbb{N} \text{ est dense dans } \mathbb{R} \iff \frac{u}{v} \notin \mathbb{Q}.$$

(i) Montrer que $\sin(\mathbb{N})$ est dense dans $[-1, 1]$.

---

[1] Merci PL!

[2] $E\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ dénote la partie entière. Rappelons que $E(x)$ est le seule entier (positif ou négatif) vérifiant:

$$E(x) \leq x < E(x+1).$$

Réponse

(a)

Le groupe H étant différent de $\{0\}$, nous pouvons trouver $h \in H$ avec $h \neq 0$. Puisque H est un groupe, alors $-h \in H$. En d'autres termes $|h| \in H$ et $|h| \neq 0$. L'ensemble $\{x \in H \mid x > 0\}$ est donc non vide. Puisque il est minoré (par 0), alors le nombre a existe.

Supposons que $a \notin H$. Puisque $a < 2a$ alors $2a$ n'est pas un minorant de $\{x \in H \mid \ x > 0\}$. Nous pouvons trouver donc $h_1 \in H$ avec $0 < h_1 < 2a$. Nous avons en fait

$$0 < a < h_1 < 2a,$$

car $a \notin H$. Nous avons aussi que h_1 n'est pas un minorant de $\{x \in H \mid \ x > 0\}$. Nous pouvons trouver donc $h_2 \in H$ avec $0 < h_2 < h_1$. Nous avons en fait

$$0 < a < h_2 < h_1 < 2a,$$

car $a \notin H$. Remarquons que l'élément $h = h_1 - h_2$ vérifie:

$$0 < h < a \text{ et } \ h \in H.$$

Ceci contredit la définition de a. L'affirmation "Supposons que $a \notin H$" est donc fausse, ce qui donne $a \in H$.

(b (1))

Puisque $a \in H$ alors on a $a\mathbb{Z} = \{na = \underbrace{a + \cdots + a}_{n \ fois} \mid n \in \mathbb{Z}\} \subset H$ car H est un sousgroupe.

(b (2))

Par définition de partie entière nous pouvons écrire:

$$E(h/a) \leq h/a < E(h/a) + 1,$$

c'est-à-dire,

$$E(h/a)a \leq h < E(h/a)a + a,$$

ou encore

$$0 \leq h - E(h/a)a < a.$$

Puisque $a, h \in H$ nous avons $h - E(h/a)a \in H$. La définition de a empêche le cas $0 < h - E(h/a)a < a$. On arrive donc à $h = E(h/a)a$. D'où $H \subset a\mathbb{Z}$.

(b (3))

Puisque $a\mathbb{Z} \subset H$ (cf. (b(1)) et $H \subset a\mathbb{Z}$ (cf. (b(2)) nous arrivons à $H = a\mathbb{Z}$.

(c (1))

Puisque $0 = \inf\{x \in H \mid x > 0\}$ alors $\exists h \in H$ avec $0 < h < \beta - \alpha$.

(c (2))

Par définition de partie entière nous pouvons écrire:

$$E(\alpha/h) \leq \alpha/h < E(\alpha/h) + 1,$$

c'est-à-dire,

$$\alpha < E(\alpha/h)h + h \leq \alpha + h < \beta$$

$(h > 0)$ ou encore

$$E(\alpha/h)h + h \in]\alpha, \beta[.$$

Puisque $E(\alpha/h)h + h \in H$ nous avons $]\alpha, \beta[\cap H \neq \emptyset$.

(c (3))

Le groupe H est dense dans $\mathbb{R}$ car H rencontre tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$.

(d)

Nous venons de montrer qu'un sous-groupe $H \neq \{0\}$ de $\mathbb{R}$ est ou bien dense dans $\mathbb{R}$ $(a = 0)$ ou bien de la forme $w\mathbb{Z}$, pour un certain $w \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ $(a > 0)$. Ainsi, la propriété (d) revient à montrer:

$$\frac{u}{v} \in \mathbb{Q} \Longleftrightarrow u\mathbb{Z} + v\mathbb{Z} = w\mathbb{Z} \text{ pour un certain } w \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Voyons cette équivalence.

$\boxed{\Rightarrow}$ Posons $p, q \in \mathbb{N}^*$ avec $\frac{u}{v} = \frac{p}{q}$ et $\operatorname{pgcd}(p, q) = 1$. Nous avons:

$$u\mathbb{Z} + v\mathbb{Z} = v\left(\frac{u}{v}\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\right) = v\left(\frac{p}{q}\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\right) = \frac{v}{q}(p\mathbb{Z} + q\mathbb{Z}) \overset{\textit{Bézout}}{=\!=\!=} \frac{v}{q}\mathbb{Z}.$$

Il suffit donc de prendre $w = v/q = u/p$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Par hypothèse, il existe $m, n \in \mathbb{Z}$ avec: $u = mw$ et $v = nw$. Puisque $w \neq 0$ et $n \neq 0$ nous avons:

$$\frac{u}{v} = \frac{mw}{nw} = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}.$$

(e)

La fonction cosinus étant périodique de périodes 2π, nous avons $\cos(\mathbb{Z}) = \cos(\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z})$. Puisque $2\pi/1 \notin \mathbb{Q}$ alors $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Puisque $\cos\colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$ est une application continue et surjective, alors il suffit de prouver l'affirmation suivante:

> "Soit $f\colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$ une application continue et surjective. Si D est un sous-ensemble dense de $\mathbb{R}$ alors $f(D)$ est un sous-ensemble dense de $[-1, 1]$"

En fait il faut montrer:

$$O \in \mathcal{T}_{[-1,1]}, \text{ avec } O \neq \emptyset \Rightarrow f(D) \cap O \neq \emptyset.$$

Nous avons:

$$f^{-1}(f(D) \cap O) = f^{-1}(f(D)) \cap f^{-1}(O) \supset D \cap f^{-1}(O).$$

Nous savons que D est dense dans $\mathbb{R}$, que $f^{-1}(O) \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ (car f continue) et que $f^{-1}(O) \neq \emptyset$ (car f est surjective). Nous en déduisons que $D \cap f^{-1}(O) \neq \emptyset$. Par conséquent, $f^{-1}(f(D) \cap O) \neq \emptyset$. Finalement

$$\emptyset \neq f\left(f^{-1}(f(D) \cap O)\right) = f(D) \cap O,$$

car f est surjective.

(f)

Non!!!!!!!!! On a $(u\mathbb{N} + v\mathbb{N}) \cap]-\infty, 0[= \emptyset$!!!

(g)

Non plus!! Procédons comme au début de l'exercice. Posons

$$a = \inf\{h \in u\mathbb{N} + v\mathbb{N} \mid h > 0\}.$$

Ce nombre existe car l'ensemble $\{h \in u\mathbb{N} + v\mathbb{N} \mid h > 0\}$ est non vide (il contient par exemple u) et minoré (par 0). Remarquons que $u \leq un$ et $v \leq vm$ pour tous $n, m \in \mathbb{N}^*$. Ainsi,

$$a = \inf\{u, v\} > 0.$$

Nous concluons que $u\mathbb{N} + v\mathbb{N}$ n'est pas dense dans $[0, \infty[$ car $(u\mathbb{N} + v\mathbb{N}) \cap]0, a[= \emptyset$ et $]0, a[\neq \emptyset$.

(h)

Remarque. La situation à (c) et à (h) est complètement différente. Tandis que dans le premier cas nous pouvons utiliser que:

$$h \in H \quad \text{et} \quad \ell \in \mathbb{Z} \Rightarrow \ell \cdot h \in H,$$

alors dans le deuxième cas nous n'avons que:

$$h \in (u\mathbb{N} - v\mathbb{N}) \quad \text{et} \quad \ell \in \mathbb{N} \Rightarrow \ell \cdot h \in (u\mathbb{N} - v\mathbb{N}).$$

La preuve de (h) est donc différente que celle de (c).

(h (1))

Puisque $u/v \notin \mathbb{Q}$ nous savons que $u\mathbb{Z}+v\mathbb{Z}$ rencontre tout ouvert non vide de $\mathbb{R}$ (cf. (d)). En particulier, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, nous pouvons choisir $h_n \in (u\mathbb{Z} + v\mathbb{Z}) \cap \left(\left]-\frac{1}{n+1}, 0\right[\cup \left]0, \frac{1}{n+1}\right[\right)$. Posons

$$h_n = m_n u - k_n v. \tag{1}$$

Quitte remplacer h_n par $-h_n$ on peut supposer que $m_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Nous avons

$$\lim_{n\to\infty} h_n = 0 \quad \text{et } h_n \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Distinguons deux cas:

+ La suite (m_n) est bornée . Puisque $(m_n) \subset \mathbb{N}$ alors il existe une sous-suite (m'_n) constante, c'est-à-dire, $\exists \mu \in \mathbb{N}$ avec $m'_n = \mu$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, la sous-suite (k'_n) est convergente. Puisque cette suite habite dans $\mathbb{Z}$ alors elle est stationnaire: $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ et $\kappa \in \mathbb{Z}$ tels que $k'_n = \kappa$ si $n \geq n_0$. Nous avons donc

  (2) $$0 = \lim_{n\to\infty} h'_n = \lim_{n\to\infty} (m'_n u - k'_n v) = \mu u - \kappa v.$$

  Pusique $u/v \notin \mathbb{Q}$, l'égalité (2) donne $\mu = \kappa = 0$ et donc $h'_{n_0} = 0$. Impossible. Cette contradiction montre que la suite (m_n) n'est donc pas bornée.

+ La suite (m_n) n'est pas bornée . Puisque $(m_n) \subset \mathbb{N}$ alors il existe une sous-suite croissante (m'_n) avec $\lim\limits_{n\to\infty} m'_n = \infty$. Posons (h'_n) et (k'_n) les deux sous-suites correspondantes. Puisque $\lim\limits_{n\to\infty} h'_n = 0$, d'après (1) nous pouvons écrire:

  $$\lim_{n\to\infty} k'_n = \lim_{n\to\infty} \frac{m'_n u - h'_n}{v} = \infty.$$

Il existe donc une sous-suite croissante (k''_n) vers ∞. En particulier, $m''_n \geq 0$ et $k''_n \geq 0$ à partir d'un certain n_0.

Conclusion: La suite $h''_{n+n_0} = m''_{n+n_0} u - k''_{n+n_0} v$ vérifie les conditions demandées.

(h (2))

D'après (h (1)) nous pouvons trouver un élément

$$h_{n_0} \in (u\mathbb{N} - v\mathbb{N}) \cap \big(]-(\beta-\alpha), 0[\cup]0, \beta-\alpha[\big).$$

Si $h_{n_0} \in]0, \beta-\alpha[$ nous aurons fini en prenant $h = h_{n_0}$. Si $h_{n_0} \in]-(\beta-\alpha), 0[$, la propriété (h (1)) donne l'existence de $n_1 > n_0$ avec

$$h_{n_1} \in (u\mathbb{N} - v\mathbb{N}) \cap \big(]h_{n_0}, 0[\cup]0, -h_{n_0}[\big).$$

Si $h_{n_1} \in]0, -h_{n_0}[$ nous aurons fini en prenant $h = h_{n_1}$ car $]0, -h_{n_0}[\subset]0, \beta-\alpha[$. Supposons donc $h_{n_0} < h_{n_1}$ et prenons $h = h_{n_1} - h_{n_0}$. Par construction $0 < h < \beta - \alpha$. D'autre part, nous avons:

$$h = h_{n_1} - h_{n_0} = (m_{n_1} - m_{n_0})\, u - (k_{n_1} - k_{n_0})\, v \in u\mathbb{N} - v\mathbb{N},$$

car (m_n) et (k_n) sont des suites croissantes.

(h (3))

D'après (h (2)), il existe $h \in]0, \beta-\alpha[\cap (u\mathbb{N} - v\mathbb{N})$. Par définition de partie entière nous pouvons écrire:

$$E(\alpha/h) \leq \alpha/h < E(\alpha/h) + 1,$$

c'est-à-dire,

$$\alpha < E(\alpha/h)h + h \leq \alpha + h < \beta$$

$(h > 0)$ ou encore

$$E(\alpha/h)h + h \in]\alpha, \beta[.$$

Puisque $\alpha/h \geq 0$ nous avons $E(\alpha/h)h + h \in u\mathbb{N} - v\mathbb{N}$ et donc (3).

(h (4))

D'après (d) il suffit de montrer

$$u\mathbb{N} - v\mathbb{N} \text{ est dense dans } \mathbb{R} \iff u\mathbb{Z} + v\mathbb{Z} \text{ est dense dans } \mathbb{R}.$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Puisque $u\mathbb{N} - v\mathbb{N} \subset u\mathbb{Z} + v\mathbb{Z}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Soient deux nombres réels $\alpha < \beta$. Nous allons montrer que

$$(u\mathbb{N} - v\mathbb{N}) \cap]\alpha, \beta[\neq \emptyset. \tag{3}$$

Distinguons trois cas:

Premier cas: $0 \leq \alpha < \beta$. Voir (h (3)).

Deuxième cas: $\alpha < 0 < \beta$. Car $0 \in (u\mathbb{N} - v\mathbb{N}) \cap]\alpha, \beta[$.

Troisème cas: $\alpha < \beta \leq 0$. Remarquons le premier cas montre aussi que $(v\mathbb{N} - u\mathbb{N}) \cap]-\beta, -\alpha[\neq \emptyset$. En multipliant par (-1) on obtient (3).

(i)

La fonction sinus étant périodique de période 2π, nous avons $\sin(\mathbb{N}) = \sin(\mathbb{N} - 2\pi\mathbb{N})$. Puisque $2\pi/1 \notin \mathbb{Q}$ alors $\mathbb{N} - 2\pi\mathbb{N}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Puisque $\sin\colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$ est une application continue et surjective, alors on sait que l'ensemble $\sin\mathbb{N}$ est un sous-ensemble dense de $[-1, 1]$ (cf. (e)).